Caos Determinista

Carlos Gershenson

IIMAS & C3, UNAM

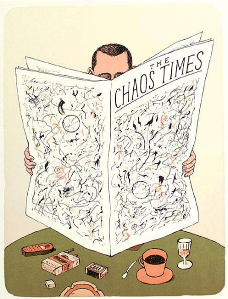
http://turing.iimas.unam.mx/~cgg/teach/Pamplona

Contenido

Repaso

- Complejidad: Falta de previsibilidad por interacciones
- Adaptación
- Auto-organización
- Ahora: Caos determinista: Falta de previsibilidad por sensibilidad a condiciones iniciales

- ¿Los sistemas deterministas son predecibles?
  - No siempre, ojo con la *no-linearidad*.

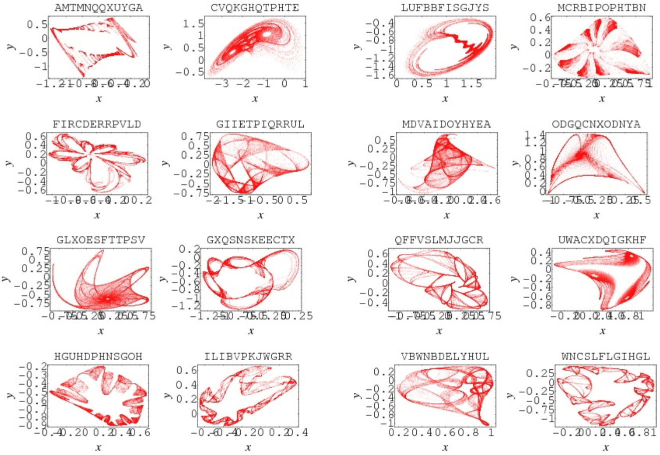


Sensibilidad a condiciones iniciales

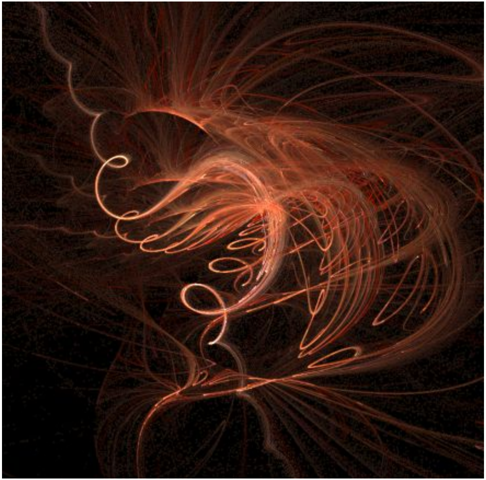
- E.g. estados iniciales 2.1234567890 y 2.1234567891
- Nos llevan a estados finales 3.5 y -1.7
- No importa cuanta precision tengamos, hay divergencia *exponencial* de trayectorias.
    - exponentes de Lyapunov mayores que cero.
- Atractores extraños
    - auto-afines, i.e. fractales.

Atractores extraños

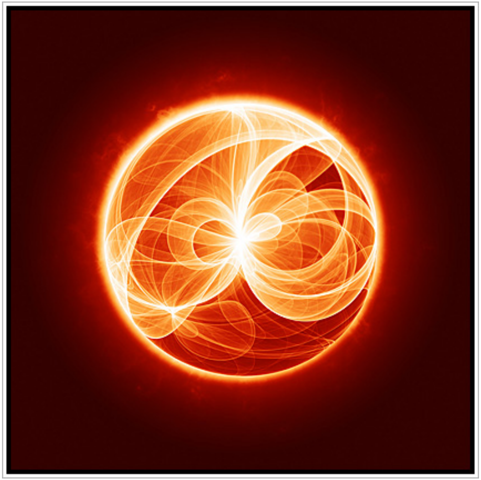
http://mathworld.wolfram.com/StrangeAttractor.html



http://www.countwordula.com/2006/09/13/strange-attractors-0086/



http://www.nathanselikoff.com/strangeattractors/



Mapeo logístico

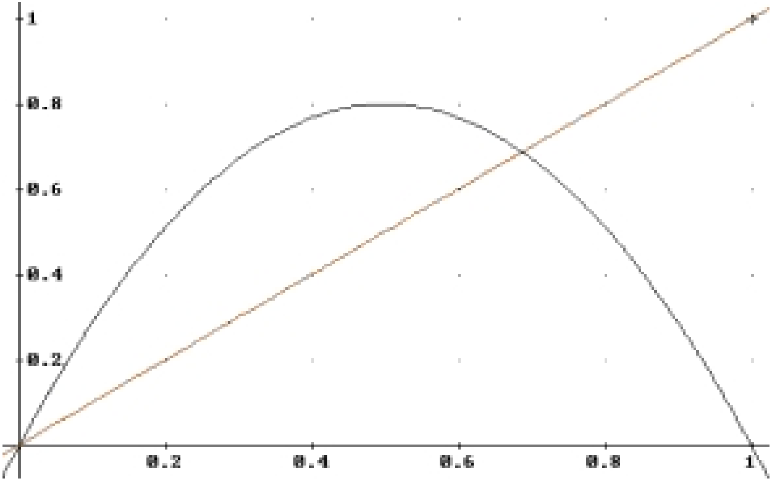
$$f(x) = ax(1-x)$$

- Usada e.g. en dinámica poblacional.
- a representa la "fertilidad" o "taza de crecimiento", $0 <= a <= 4$, $0 <= x_0 <= 1$.
- f es una parábola, la cual es *iterada*.

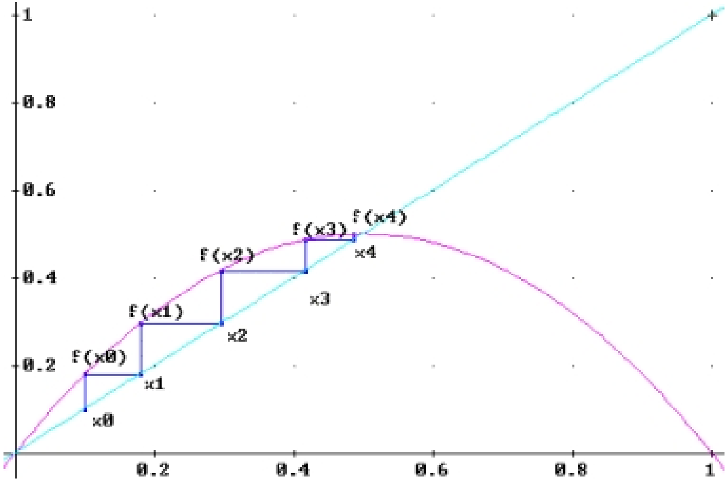
$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 = f(x_1) &= f^2(x_0) \\ &\dots \\ x_n = f(x_{n-1}) &= f^n(x_0) \end{aligned}$$

- Donde x_n es la n^{ava} iteración de x_0.
- El conjunto de todas las iteraciones es el *mapeo* de f.

$a = 3.2$

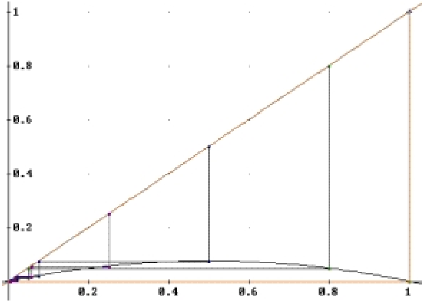


Iteraciones ($a = 2.0$)



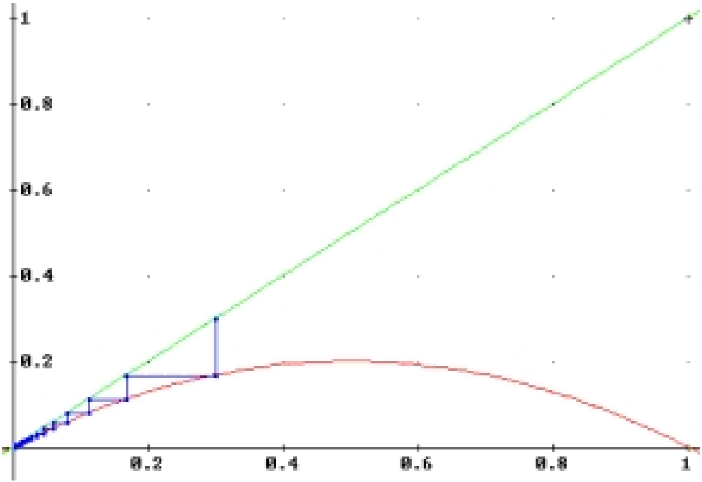
Incrementemos a

- Si $a = 0, f(x) = 0, \forall x_0$
- Si incrementamos un poco a, $x_n = 0, \forall x_0$, e.g. $a = 0.3$



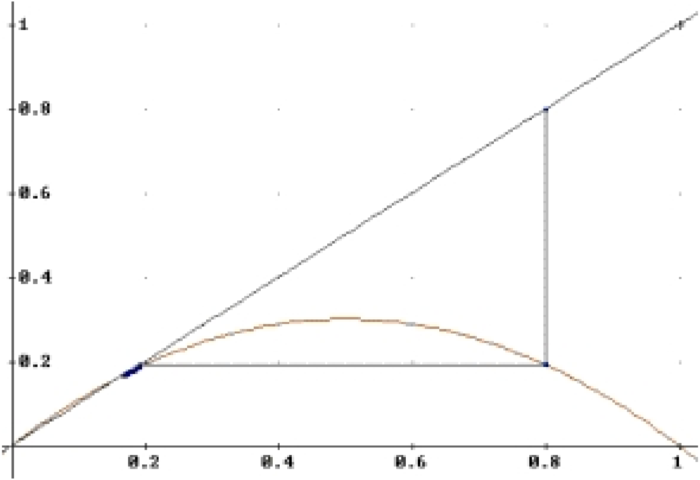
$a = 0.8$

0 sigue siendo un atractor estable.



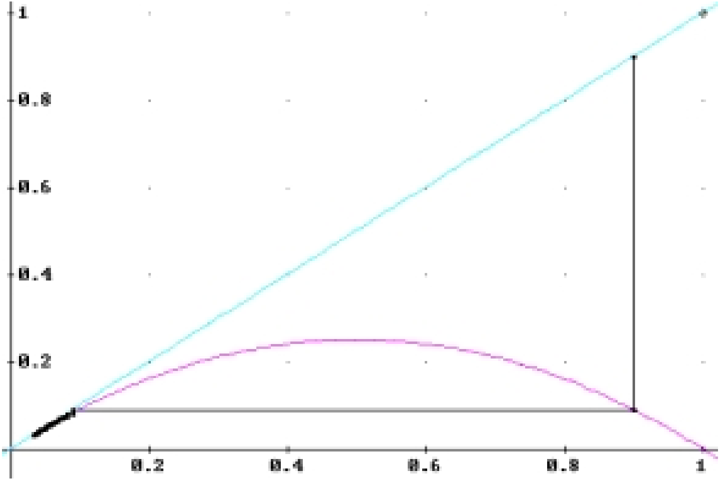
$a = 1.2$

El atractor cambia a la intersección entre la parábola y la línea de identidad.



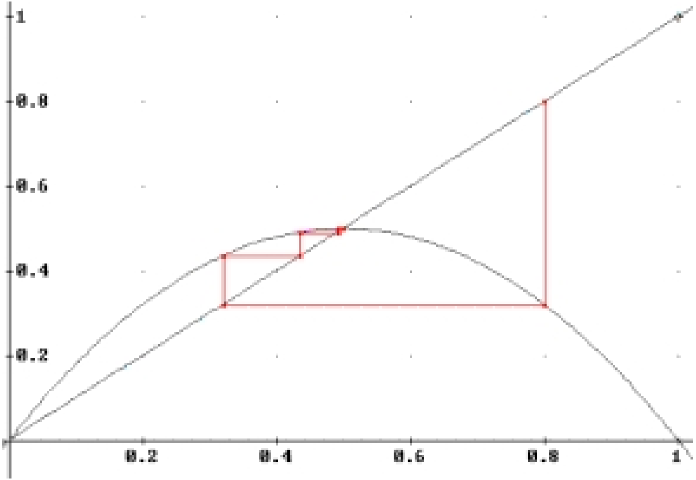
La transición $a = 1.0$

Cero es atractor asintótico.



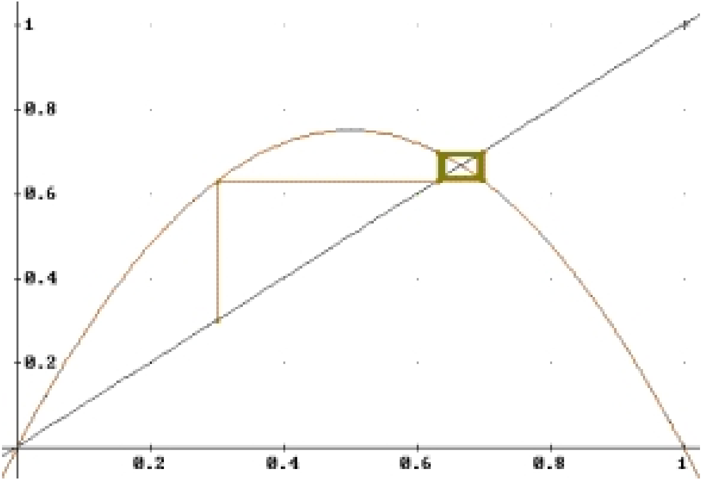
$a = 2.0$

Cero es un atractor inestable, $1 - 1/a$ es nuevo atractor estable.



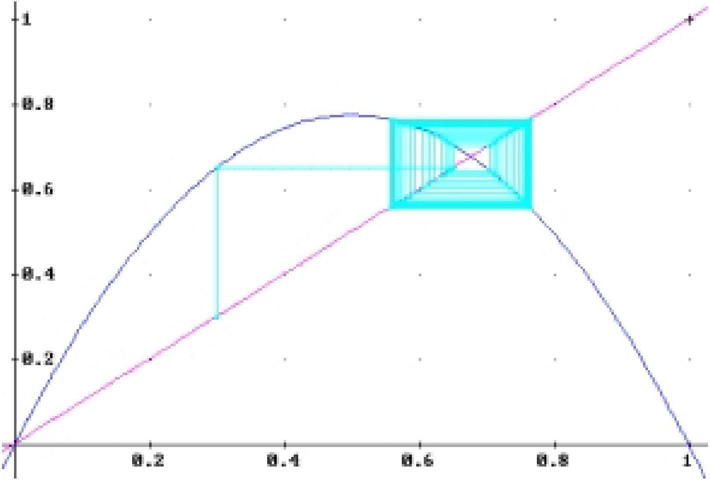
$a = 3.0$

Atractor asintótico...



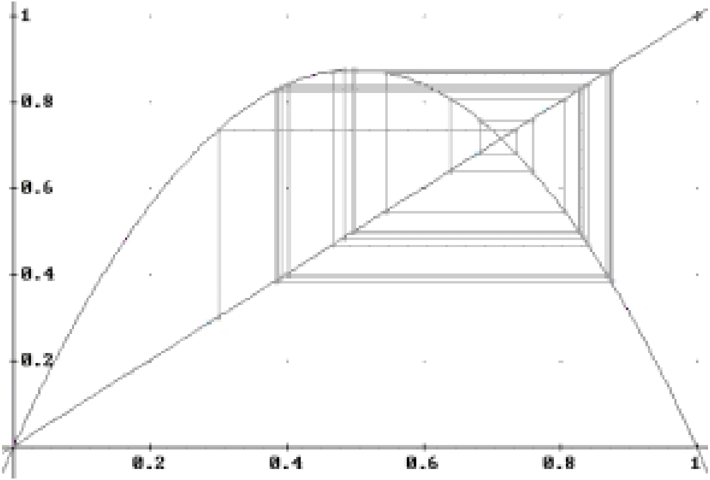
$a = 3.1$

$1 - 1/a$ se vuelve inestable, hay un nuevo atractor cíclico (órbita) de período 2.



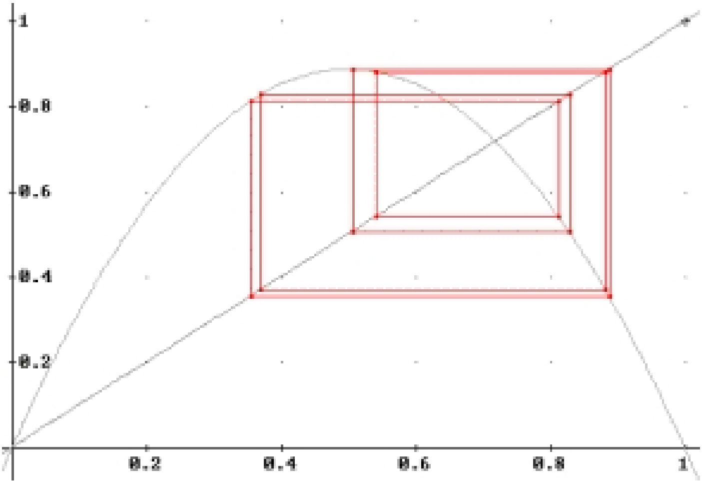
$a = 3.5$

La órbita de período 2 se vuelve inestable, hay un nuevo atractor estable de periódo 4.



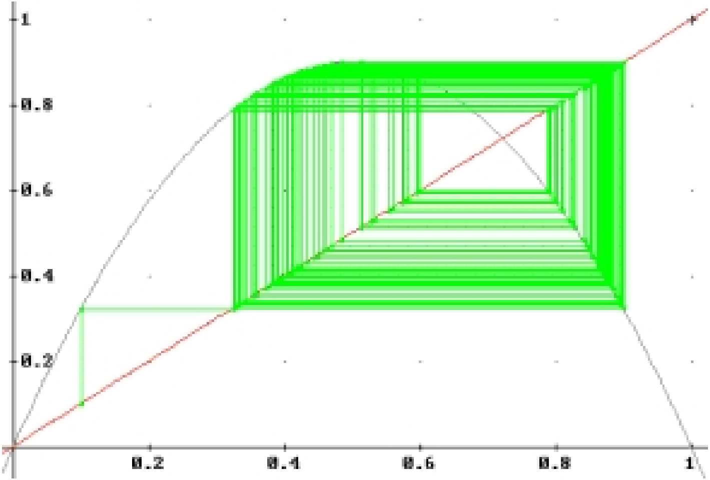
$a = 3.55$

Atractor de período 8.



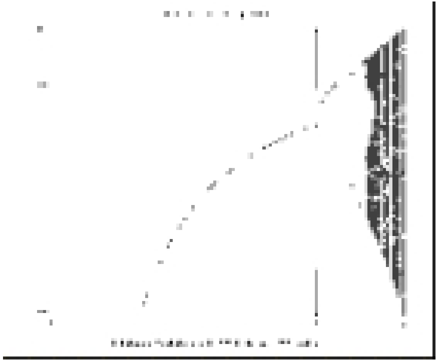
$a = 3.6$

Las órbitas estables e inestables jalan y empujan la dinámica... bienvenidos al caos...

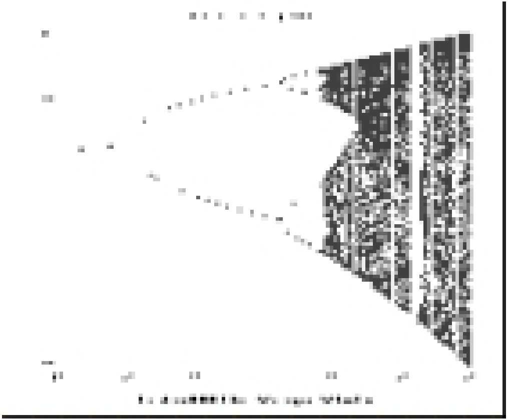


Diagramas de bifurcación

- Grafiquemos dónde se concentra la dinámica después de cierto tiempo, i.e. atractores.
- Sección de Poincaré

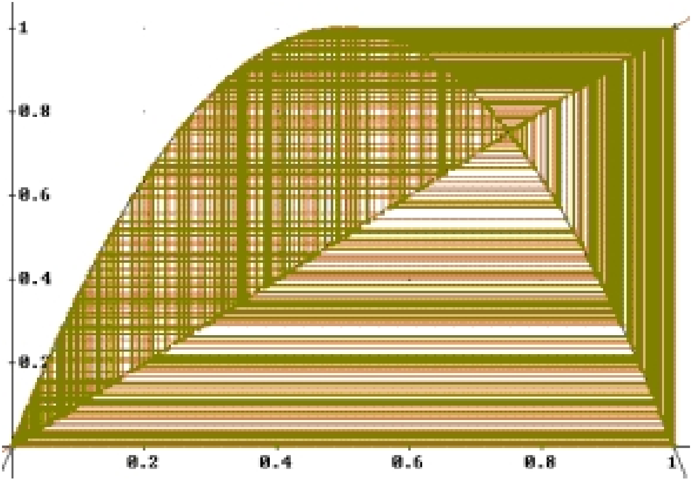


Zoom...



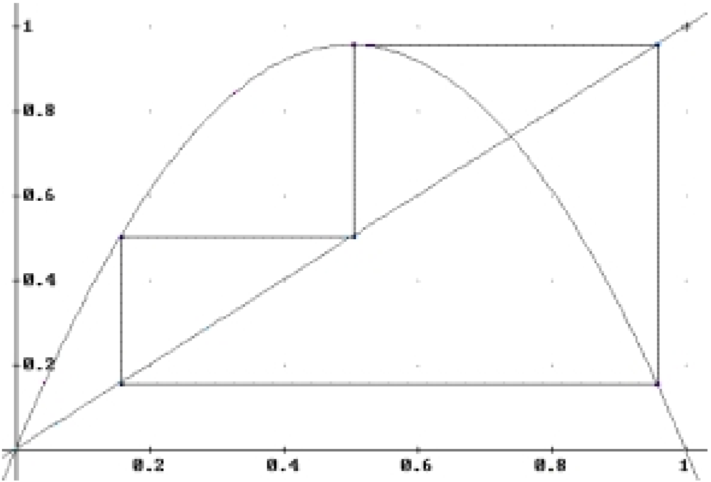
http://brain.cc.kogakuin.ac.jp/~kanamaru/Chaos/e/BifArea/

$a = 4.0$



$a = 3.83$

Una “ventana”, con una órbita de periódo 3



Más diagramas de bifuración

- El del mapeo logístico contiene órbitas estables de período de todos los números naturales.
- Keep on zooming... no se vuelve más simple... es auto-afin, i.e. fractal... una parte contiene de nuevo órbitas de período de todos los números naturales.
- Los números naturales se contienen a sí mismos infinitamente...

Universalidad

- Mitch Feigenbaum en 1975, midió la convergencia geométrica de los puntos de bifurcación.

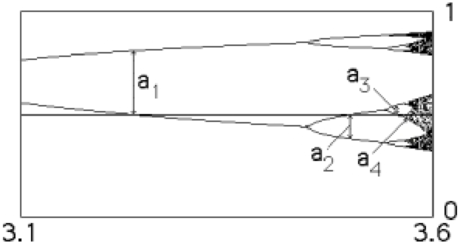
$$\frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n}$$

- $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 3.4495..., a_3 = 3.5441..., a_4 = 3.5644...$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} = \delta = 4.669201609...$$

- δ es *universal*, i.e. describe bifurcación en todos los mapeos con un sólo máximo cuadrado.
- También describe diámetros de círculos sucesivos en el eje real del conjunto de Mandelbrot.

Otra constante universal



$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha = 2.502907876...$$

- Razón entre la distancia entre 0.5 y órbita más cercana en órbitas superestables.
- Órbitas superestables convergen más rápido a atractores.
- La razón entre distancias de órbitas superestables es δ .

Conclusiones

- Caos: sensibilidad a condiciones iniciales
- Atractores estables e inestables jalan y empujan la dinámica.
- Mapeo logístico ejemplo simple.
- Diagramas de bifuración.
- Universalidad